PROBLEMAS Capítulo 2

2–6–1 Eficiencia del Haz Principal. Para una antena con patrón de campo
E_n = [(sin θ)/θ] / [(sin φ)/φ]
donde θ = ángulo de zenith (radianes) y φ = ángulo de azimut (radianes),
(*a*) Plotee el patrón de potencia normalizado como una función de θ;
(*b*) Usando su gráfico, estime la eficiencia del haz principal de esta antena.

2–7–1 Directividad. Muestre que la directividad *D* de una antena puede ser escrita como:

$$D = \frac{\dfrac{E(x,y)_{\max} E^*(x,y)_{\max}}{Z} r^2}{\frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} \dfrac{E(x,y)E^*(x,y)}{Z} r^2 d\Omega}$$

Solución:

$$U(\theta,\phi)_{\max} = S(\theta,\phi)_{\max} r^2, \quad U_{av} = \frac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} U(\theta,\phi) d\Omega$$

$$U(\theta,\phi) = S(\theta,\phi) r^2, \quad S(\theta,\phi) = \frac{E(\theta,\phi)E^*(\theta,\phi)}{Z}$$

Por tanto:

$$D = \frac{\dfrac{E(\theta,\phi)_{\max} E^*(\theta,\phi)_{\max}}{Z} r^2}{\dfrac{1}{4\pi}\iint_{4\pi} \dfrac{E(\theta,\phi)E^*(\theta,\phi)}{Z} r^2 d\Omega} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Note que $r^2 =$ área/estereorradián, tal que $U = Sr^2$ o (vatios/estereorradián) = (w/m^2) $\times$ m^2

2–7–2 Directividad aproximada. Calcule la directividad aproximada de los anchos de haz de media potencia de una antena unidireccional, sí el patrón de potencia normalizado esta dado por:
(*a*) P_n = cos θ,
(*b*) P_n = cos^2 θ,
(*c*) P_n = cos^3 θ, y
(*d*) P_n = cos^n θ.
En todos los casos estos patrones son unidireccionales (dirección +*z*) con P_n teniendo valores sólo para los ángulos de zenith 0° ≤ θ ≤ 90° y P_n = 0 para 90° ≤ θ ≤ 180°. Los patrones son independientes del ángulo de azimut φ.

Solución:

(a) $\theta_{\text{HP}} = 2\cos^{-1}(0.5) = 2\times 60^\circ = 120^\circ$, $\qquad D = \dfrac{40,000}{(120)^2} = 2.78$ (*rpta.*)

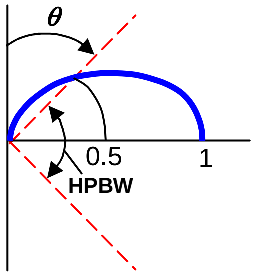
(b) $\theta_{\text{HP}} = 2\cos^{-1}(\sqrt{0.5}) = 2\times 45^\circ = 90^\circ$, $\qquad D = \dfrac{40,000}{(90)^2} = 4.94$ (*rpta.*)

(c) $\theta_{\text{HP}} = 2\cos^{-1}(\sqrt[3]{0.5}) = 2\times 37.47^\circ = 74.93^\circ$, $\qquad D = \dfrac{40,000}{(75)^2} = 7.3$ (*rpta.*)

(d) $\theta_{\text{HP}} = 2\cos^{-1}(\sqrt[n]{0.5})$, $\qquad D = \dfrac{10,000}{(\cos^{-1}(\sqrt[n]{0.5}))^2}$ (rpta.)

***2–7–3 Directividades Aproximadas.** Calcule las directividades aproximadas de los anchos de haz de media potencia de las tres antenas unidireccionales teniendo patrones de potencia como sigue:
$P_{(\theta,\ \varphi)} = P_m \sin\theta \sin^2\varphi$
$P_{(\theta,\ \varphi)} = P_m \sin\theta \sin^3\varphi$
$P_{(\theta,\ \varphi)} = P_m \sin^2\theta \sin^3\varphi$
$P_{(\theta,\ \varphi)}$ tiene valores sólo para $0 \le \theta \le \pi$ y $0 \le \varphi \le \pi$ y es cero para cualquier otro valor.

Solución:
Para encontrar *D* usamos las relaciones aproximadas,
Encontrando los anchos de haces de media potencia.



$$\frac{\text{HPBW}}{2} = 90 - \theta \quad \text{o} \quad \theta = 90 - \frac{\text{HPBW}}{2}$$

Para el patrón $\sin\theta$, $\sin\theta = \sin\left(90 - \frac{\text{HPBW}}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$90 - \frac{\text{HPBW}}{2} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \quad -\frac{\text{HPBW}}{2} \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - 90, \quad \therefore \text{HPBW} = 120^{\circ}$$

Para el patrón $\sin^2\theta$, $\sin^2\theta = \sin^2\left(90 - \frac{\text{HPBW}}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$\sin\left(90 - \frac{\text{HPBW}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \therefore \text{HPBW} = 90^{\circ}$$

Para el patrón $\sin^3\theta$, $\sin^3\theta = \sin^3\left(90 - \frac{\text{HPBW}}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

$$\sin\left(90 - \frac{\text{HPBW}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \quad \therefore \text{HPBW} = 74.9^{\circ}$$

Luego,

$$D = \frac{41{,}253\,\text{sq. deg.}}{\theta_{\text{HP}}\phi_{\text{HP}}} = \frac{41{,}253}{(120)(90)} = 3.82 \cong \frac{40{,}000}{(120)(90)} = 3.70$$ (rpta.)
para $P(\theta,\phi) = \sin\theta \sin^2\phi$

$$= \frac{41{,}253}{(120)(74.9)} = 4.59 \cong \frac{40{,}000}{(120)(74.9)} = 4.45$$ (rpta.)
para $P(\theta,\phi) = \sin\theta \sin^3\phi$

$$= \frac{41{,}253}{(90)(74.9)} = 6.12 \cong \frac{40{,}000}{(90)(74.9)} = 5.93$$ (rpta.)
para $P(\theta,\phi) = \sin^2\theta \sin^3\phi$

***2–7–4 Directividad y ganancia.**
(*a*) Estime la directividad de una antena con $\theta_{HP} = 2°$, $\varphi_{HP} = 1°$, y
(*b*) Encuentre la ganancia de esta antena sí la eficiencia $k = 0.5$.

Solución:

(a) $D = \frac{40{,}000}{\theta_{\text{HP}}\phi_{\text{HP}}} = \frac{40{,}000}{(2)(1)} = 2.0 \times 10^4$ o 43.0 dB (rpta.)

(b) $G = kD = 0.5(2.0 \times 10^4) = 1.0 \times 10^4$ o 40.0 dB (rpta.)

2–9–1 Directividad y aperturas. Muestre que la directividad de una antena puede ser expresada como:

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\iint_{Ap} E(x,y)dxdy \iint_{Ap} E^*(x,y)dxdy}{\iint_{Ap} E(x,y)E^*(x,y)dxdy}$$

donde *E(x, y)* es la apertura de la distribución de campo.

Solución: Si el campo sobre la apertura es uniforme, la directividad es un máximo (= D_m) y la potencia radiada es P'. Para una distribución de apertura real, la directividad es *D* y la potencia radiada es *P*. Igualando las potencies efectivas

$$D_m P' = D P, \qquad D = D_m \frac{P'}{P} = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_p \frac{\dfrac{E_{av} E_{av}^*}{Z} A_p}{\iint_{Ap} \dfrac{E(x,y)E^*(x,y)}{Z} dxdy}$$

donde $$E_{av} = \frac{1}{A_p} \iint_{Ap} E(x,y)dxdy$$

por tanto $$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\iint_{Ap} E(x,y)dxdy \iint_{Ap} E^*(x,y)dxdy}{\iint_{Ap} E(x,y)E^*(x,y)dxdy}$$ l.q.q.d.

donde $$\frac{E_{av} E_{av}^* A_p}{\iint_{Ap} E(x,y)E^*(x,y)dxdy} = \frac{E_{av} E_{av}^*}{\dfrac{1}{A_p}\iint E(x,y)E^*(x,y)dxdy} = \frac{E_{av}^*}{(E^2)_{av}} = \varepsilon_{ap} = \frac{A_e}{A_p}$$

2–9–2 Apertura Efectiva y área de haz. ¿Cuál es la apertura efectiva máxima (aproximadamente) para una antena de haz teniendo anchos de media potencia de 30° y 35° en planos perpendiculares intersectándose en el eje del haz? Los lóbulos menores son pequeños y pueden ser despreciados.

Solución:

$$\Omega_A \cong \theta_{HP}\phi_{HP} = 30^o \times 35^o, \qquad A_{em} = \frac{\lambda^2}{\Omega_A} \cong \frac{57.3^2}{30^o \times 35^o}\lambda^2 = 3.1\lambda^2$$ (rpta.)

***2–9–3 Apertura Efectiva y directividad.** ¿Cuál es la apertura máxima efectiva de una antena de microondas con una Directividad de 900?

Solución: $$D = 4\pi \;\; A_{em}/\lambda^2, \qquad A_{em} = \frac{D\lambda^2}{4\pi} = \frac{900}{4\pi}\lambda^2 = 71.6\lambda^2$$ (rpta.)

2–11–1 Potencia recibida y la formula de Friis. ¿Cuál es la máxima potencia recibida a una distancia de 0.5 km sobre espacio libre a una frecuencia de 1-GHz en un circuito consistente de una antena transmisora con 25-dB de ganancia y una antena receptora con 20-dB de ganancia? La ganancia es con respecto a una fuente isotrópica sin pérdidas. La potencia en la antena de transmisión es de 150 W.

Solución:

$$\lambda = c/f = 3\times10^8/10^9 = 0.3 \text{ m}, \qquad A_{et} = \frac{D_t\lambda^2}{4\pi}, \qquad A_{er} = \frac{D_r\lambda^2}{4\pi}$$

$$P_r = P_t\frac{A_{et}A_{er}}{r^2\lambda^2} = P_t\frac{D_t\lambda^2 D_r\lambda^2}{(4\pi)^2 r^2\lambda^2} = 150\frac{316\times0.3^2\times100}{(4\pi)^2 500^2} = 0.0108 \text{ W} = 10.8 \text{ mW} \quad \text{(rpta.)}$$

***2–11–2 Enlace entre naves espaciales sobre 100 Mm.** Dos naves espaciales están separadas por 100 Mm. Cada una tiene una antena con D = 1000 operando a 2.5 GHz. Sí el receptor de la nave A requiere 20 dB sobre 1 pW, ¿Qué potencia de transmisión es requerida en la nave B para alcanzar este nivel de señal?

Solución:

$$\lambda = c/f = 3\times10^8/2.5\times10^9 = 0.12 \text{ m}, \qquad A_{et} = A_{er} = \frac{D\,\lambda^2}{4\pi}$$

$$P_r(\text{requerida}) = 100\times10^{-12} = 10^{-10} \text{ W}$$

$$P_t = P_r\frac{r^2\lambda^2}{A_{et}^2} = P_r\frac{(4\pi)^2 r^2\lambda^2}{D^2\lambda^4} = P_r\frac{r^2(4\pi)^2}{D^2\lambda^2} = 10^{-10}\frac{10^{16}(4\pi)^2}{10^6\ \ 0.12^2} = 10966 \text{ W} \cong 11 \text{ kW} \quad \text{(rpta.)}$$

2–11–3 Enlace entre naves espaciales sobre 3 Mm. Dos naves espaciales están separadas por 100 Mm. Cada una tiene una antena con D = 200 operando a 2 GHz. Sí el receptor de la nave A requiere 20 dB sobre 1 pW, ¿Qué potencia de transmisión es requerida en la nave B para alcanzar este nivel de señal?

Solución:

$$\lambda = c/f = 3\times10^8/2\times10^9 = 0.15 \text{ m} \qquad A_{et} = A_{er} = \frac{D\,\lambda^2}{4\pi}$$

$$P_r = 100\times10^{-12} = 10^{-10} \text{ W}$$

$$P_t = P_r\frac{r^2\lambda^2}{A_{et}A_{er}} = P_r\frac{(4\pi)^2 r^2\lambda^2}{D^2\lambda^2\lambda^2} = 10^{-10}\frac{(4\pi)^2\ 9\times10^{12}}{4\times10^4\times0.15^2} = 158 \text{ W} \quad (rpta.)$$

2–11–4 Enlace a Marte y Júpiter.
(*a*) Diseñe un enlace de radio de dos vías (two-way) para operar sobre la distancia entre la tierra y Marte para transmisión de datos e imágenes con una sonda en Marte a 2.5 GHz con 5-MHz de ancho de banda. Una energía de 10^{-19} WHz^{-1} tiene que ser entregada al receptor en la tierra y 10^{-17} WHz^{-1} al receptor en Marte. La antena en Marte no debe ser mayor de 3 m en diámetro. Especifique la apertura efectiva de las antenas de Marte y la tierra y la potencia de transmisión (sobre el ancho de banda total) en cada extremo. Tome la distancia de la tierra a Marte igual a 6 minutos-luz.
(*b*) Repetir(*a*) para un enlace tierra Júpiter. Tome la distancia tierra Júpiter igual a 40 minutos-luz.

Solución:

(a)
$$\lambda = c/f = 3\times10^8/2.5\times10^9 = 0.12 \text{ m}$$
$$P_r(\text{Tierra}) = 10^{-19}\times5\times10^6 = 5\times10^{-13} \text{ W}$$
$$P_r(\text{Marte}) = 10^{-17}\times5\times10^6 = 5\times10^{-11} \text{ W}$$

Tomar $A_e(\text{Marte}) = (1/2)\pi\,1.5^2 = 3.5 \text{ m}^2 \quad (\varepsilon_{ap} = 0.5)$

Tomar $\quad P_t(\text{Marte}) = 1\text{ kW}$

Tomar $\quad A_e(\text{Tierra}) = (1/2)\pi\, 15^2 = 350\text{ m}^2 \quad (\varepsilon_{\text{ap}} = 0.5)$

$$P_t(\text{Tierra}) = P_r(\text{Marte})\frac{r^2\lambda^2}{A_{et}(\text{Tierra})A_{et}(\text{Marte})}$$

$$P_t(\text{Tierra}) = 5\times 10^{-11}\frac{(360\times 3\times 10^8)^2 0.12^2}{3.5\times 350} = 6.9\text{ MW}$$

Para reducir la potencia requerida de la estación terrena. Tomar la antena de dicha estación con

$$A_e = (1/2)\,\pi\;50^2 = 3927\,\text{m}^2 \quad \text{(rpta.)}$$

Así $\quad P_t(\text{Tierra}) = 6.9\times 10^6 (15/50)^2 = 620\text{ kW} \quad (rpta.)$

$$P_r(\text{Tierra}) = P_t(\text{Marte})\frac{A_{et}(\text{Marte})A_{er}(\text{Tierra})}{r^2\lambda^2} = 10^3\frac{3.5\times 3930}{(360\times 3\times 10^8)^2 0.12^2} = 8\times 10^{-14}\text{ W}$$

Lo cual es cerca de 16% del valor requerido de 5 x 10^{-13} W. Este valor de 5 x 10^{-13} W podría ser obtenido incrementando la potencia del transmisor en Marte por un factor de 6.3. Otras alternativas pueden ser (1) reducir el ancho de banda (y la velocidad de los datos) reduciendo el valor requerido de P_r o (2) usar un receptor más sensitivo.

Como se discutió en la Sec. 12-1, la *potencia del ruido* de un sistema de recepción es una función de la temperatura del sistema T y el ancho de banda B dado por $P = kTB$, donde k = constante de Boltzmann = 1.38 x 10^{-23} JK^{-1}.

Para B = 5 x 10^6 Hz (dado para este problema) y T = 50 K (un valor alcanzable),

$$P(\text{ruido}) = 1.38\times 10^{-23}\times 50\times 5\times 10^6 = 3.5\times 10^{-15}\text{ W}$$

La potencia recibida (8 x 10^{-14} W) es cerca de 20 veces esta potencia de ruido, lo cual es probablemente suficiente para una comunicación satisfactoria. De acuerdo con la temperatura del sistema de recepción, con 50 K en la estación terrena, La potencia de 1 kW del transmisor en Marte es adecuada.

(b) La distancia a Júpiter es 40/6 = 6.7 veces que a Marte, lo cual hace que la potencia requerida sea de 6.7^2 = 45 veces o que la potencia recibida sea de 1/45.

No parece realizable. Pero una solución práctica sería reducir el ancho de banda para el enlace a Júpiter por un factor de cerca de 50, haciendo B = (5/50) x 10^6 = 100 kHz.

***2–11–5 Enlace a la Luna.** Un enlace de radio de la luna a la tierra tiene una antena helicoidal axial monofilar (mano derecha) de 5λ-longitud ubicada en la luna (ver Ec. (8–3–7)) con una potencia de transmisión de 2-W a 1.5 GHz. ¿Cuáles deberán ser el estado de la polarización y la apertura efectiva para la antena ubicada en la tierra en razón de entregar 10^{-14} W al receptor? Tome la distancia tierra-luna como 1.27 segundos-luz.

Solución:

$$\lambda = c/f = 3\times 10^8/1.5\times 10^9 = 0.2\text{ m},$$

De (8-3-7) la directividad de la helicoidal en la Luna esta dada por

$$D = 12 \times 5 = 60 \quad \text{y} \quad A_{et}(\text{Luna}) = \frac{D\,\lambda^2}{4\pi}$$

De la formula de Friis

$$A_{er} = \frac{P_r r^2 \lambda^2}{P_t A_{et}} = \frac{P_r (4\pi)\; r^2 \lambda^2}{P_t D \lambda^2} = \frac{10^{-14}(3\times10^8 \times 1.27)^2 4\pi}{2\times 60} = 152\,\text{m}^2 \text{ RCP} \text{ o}$$

cerca de 14 m de diámetro (rpta.)

2–13–1 Error de fase máximo. ¿Cuál es la diferencia de fase entre un punto de la frontera esférica Fresnel-Fraunhofer y dos puntos sobre la antena, uno, *R*, del origen a la esfera perpendicular a la antena mostrada en la Fig. 2–17, y el otro, *F*, del extremo de la antena, *L*/2?

2–15–1 Ejes Semimayor y semimenor. Por rotación de coordenadas de la elipse de polarización dada por la Ec. (2–15–7),
(*a*) muestre que el ángulo de inclinación τ esta dado por

$$\tau = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2E_1E_2\cos\delta}{E_1^2 - E_2^2}\right)$$

y (*b*) muestre que

$OA = [(E_1 \cos\tau + E_2 \cos\delta \sin\tau)^2 + E_2^2 \sin^2\delta \sin^2\tau]^{½}$ y
$OB = [(E_1 \sin\tau + E_2 \cos\delta \cos\tau)^2 - E_2^2 \sin^2\delta \cos^2\tau]^{1/2}$

2–16–1 Nave espacial cerca de la luna. Una nave espacial a distancias lunares transmite a la tierra ondas en 2-GHz. Sí una potencia de 10 W es radiada isotrópicamente, encuentre
(*a*) El vector de Poynting en la tierra,
(*b*) El valor del campo eléctrico **E** rms en la tierra y
(*c*) El tiempo que toma par alas ondas de radio viajar desde el espacio a la tierra. (Tomar la distancia tierra-luna en 380 Mm.)
(*d*) ¿Cuántos fotones por unidad de área por segundo caen sobre la tierra, provenientes del transmisor de la nave espacial?

Solución:

(a) $$\text{PV (en la Tierra)} = \frac{P_t}{4\pi r^2} = \frac{10}{4\pi(380\times10^6)^2} = 5.5\times10^{-18}\ \text{Wm}^{-2} = 5.5\ \text{aWm}^{-2}$$

(rpta.)

(b) $\text{PV} = S = E^2/Z$ o $E = (SZ)^{1/2}$

o $E = (5.5\times10^{-18}\times377)^{1/2} = 45\times10^{-9} = 45\,\text{nVm}^{-1}$ (rpta.)

(c) $t = r/c = 380\times10^6/3\times10^8 = 1.27\,\text{s}$ (rpta.)

(d) Fotón = $hf = 6.63\times10^{-34}\times2\times10^9 = 1.3\times10^{-24}$ J, donde $h = 6.63\times10^{-34}$ Js

Esta es la energía de un fotón a 2.5 MHz. De (a), $\text{PV} = 5.5\times10^{-18}\ \text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}$

Por tanto, el número de fotones $= \dfrac{5.5\times10^{-18}}{1.3\times10^{-24}} = 4.2\times10^6\ \text{m}^{-2}\text{s}^{-1}$ (rpta.)

2–16–2 Más potencia con CP. Muestre que el vector de Poynting promedio de una onda polarizada circularmente es el doble que una onda polarizada linealmente si el campo eléctrico **E** máximo es el mismo para ambas ondas. Esto significa que un medio puede manejar el doble de potencia antes de quebrarse con polarización circular (CP) que con polarización lineal (LP).

Solución:

De (2-16-3) tenemos para campos rms $\mathrm{PV} = S_{av} = \dfrac{E_1^2 + E_2^2}{Z_\mathrm{o}}$

Para LP, $E_2 \ (\text{or } E_1) = 0,$ so $S_{av} = \dfrac{E_1^2}{Z_\mathrm{o}}$

Para CP, $E_1 = E_2,$ so $S_{av} = \dfrac{2E_1^2}{Z_\mathrm{o}}$

Por tanto $S_{\mathrm{CP}} = 2S_{\mathrm{LP}}$ (rpta.)

2–16–3 PV constante para CP. Muestre que el vector de Poynting instantáneo (PV) de una onda plana viajando circularmente polarizada es una constante.

Solución:

$E_{\mathrm{CP}} = E_x \cos\omega t + E_y \sin\omega t$ donde $E_x = E_y = E_\mathrm{o}$

$|E_{\mathrm{CP}}| = (E_\mathrm{o}^2 \cos^2 \omega t + E_\mathrm{o}^2 \sin^2 \omega t)^{1/2} = E_\mathrm{o}(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)^{1/2} = E_\mathrm{o}$ (una constante)

Por tanto $= —$ (una constante) (rpta.)

***2–16–4 Potencia de una onda EP.** Una onda elípticamente polarizada en un medio con una constante $\sigma = 0$, $\mu_r = 2$, $\varepsilon_r = 5$ tiene componentes de campo *H* (normal la dirección de propagación y normal a la otra) de amplitudes de 3 y 4 Am^{-1}. Encuentre la potencia promedio transportada a través de un área de $5\mathrm{m}^2$ perpendicular a la dirección de propagación

Solución:

$$S_{av} = \frac{1}{2} Z(H_1^2 + H_2^2) = \frac{1}{2} 377(\mu_r/\varepsilon_r)^{1/2}(H_1^2 + H_2^2) = \frac{1}{2} 377(2/5)^{1/2}(3^2 + 4^2) = 2980\ \mathrm{Wm}^{-2}$$

$P = AS_{av} = 5 \times 2980 = 14902\ \mathrm{W} = 14.9\ \mathrm{kW}$ (rpta.)

2–17–1 Dipolos cruzados para CP y otros estados. Dos dipolos de $\lambda/2$ están cruzados a 90°. Sí los dos dipolos son alimentados con corrientes iguales, ¿Cuál es la polarización de la radiación perpendicular al plano de los dipolos sí las corrientes son (*a*) en fase, (*b*) cuadratura de fase (90° de diferencia en fase), y (*c*) fase en octatura (45° de diferencia en fase)?

Solución:

(a) LP (rpta.)

(b) CP (rpta.)

(c) De (2-17-3) $\sin 2\varepsilon = \sin 2\gamma \sin\delta$

donde $\gamma = \tan^{-1}(E_2/E_1) = 45^\circ$

$\delta = 45^\circ$

$\varepsilon = 22\frac{1}{2}^\circ$

$\text{AR} = \cot\varepsilon = 1/\tan\varepsilon = 2.41 \quad \text{(EP)...}(\textit{rpta.})$

***2–17–2 Polarización de dos onda LP.** Una onda viajando hacia afuera perpendicularmente a la página (hacia el lector) tiene dos componentes linealmente polarizados

$E_x = 2\cos\omega t$

$E_y = 3\cos(\omega t + 90°)$

(*a*) ¿Cuál es la relación axial de la onda resultante?
(*b*) ¿Cuál es el ángulo de inclinación τ del eje mayor de la elipse de polarización?
(*c*) ¿**E** rota en sentido horario o antihorario?

Solución:

(a) De (2-15-8) , $\text{AR} = 3/2 = 1.5$ (rpta.)

(b) $\tau = 90^\circ$ (rpta.)

(c) At $t = 0,\ E = E_x;$ at $t = T/4,\ E = -E_y$, luego la rotación es horaria ó CW (rpta.)

2–17–3 Superposición de dos ondas EP. Una onda viajando hacia afuera perpendicularmente a la página (hacia el lector) es el resultado de dos ondas polarizadas elípticamente, uno con componentes de **E** dados por

$E'_y = 2\cos\omega t$

$E'_x = 6\cos(\omega t + \pi/2)$

Y el otro con componentes dados por

$E''_y = 1\cos\omega t$

$E''_x = 3\cos(\omega t - \pi/2)$

(*a*) ¿Cuál es la relación axial de la onda resultante?
(*b*) ¿ **E** rota en sentido horario o antihorario?

Solución:

$$E_y = E'_y + E''_y = 2\cos\omega t + \cos\omega t = 3\cos\omega t$$
$$E_x = E'_x + E''_x = 6\cos(\omega t + \pi/2) + 3\cos(\omega t - \pi/2) = -6\sin\omega t + 3\sin\omega t = -3\sin\omega t$$

(a) E_x y E_y están en cuadratura de fase y la $\text{AR} = 3/3 = 1\ \text{(CP)}$ (rpta.)

(b) En $t = 0,\ \mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}3$, en $t = T/4,\ \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{x}}3$, por consiguiente la rotación es antihoraria ó CCW (rpta.)

***2–17–4 Dos componentes LP.** Una onda plana elípticamente polarizada viajando perpendicularmente fuera de la página (hacia el lector) tiene componentes linealmente polarizados E_x y E_y. Dado que $E_x = E_y = 1\ \text{V m}^{-1}$ y que E_y adelanta a E_x por 72°,
(*a*) Calcule y dibuje la elipse de polarización.
(*b*) ¿Cuál es su relación axial?
(*c*) ¿Cuál es el ángulo τ entre el eje mayor y el eje *x*?

Solución:

(b) $\gamma = \tan^{-1}(E_2/E_1) = 45^{\circ}$, $\delta = 72^{\circ}$

De (2-17-3), $\varepsilon = 36^{\circ}$, por tanto $\mathrm{AR} = 1/\tan\varepsilon = 1.38$ (rpta.)

(c) De (2-17-3), $\sin 2\tau = \tan 2\varepsilon / \tan\delta$ o $\tau = 45^{\circ}$ (rpta.)

2–17–5 Dos componentes LP y la esfera de Poincare. Responda las mismas preguntas que en el Prob. 2–17–4 para el caso donde E_y adelanta a E_x por 72° como antes, pero E_x = 2 Vm^{-1} y E_y = 1V m^{-1}.

Solución:

(b) $\gamma = \tan^{-1} 2 = 63.4^{\circ}$

$\delta = 72^{\circ}$

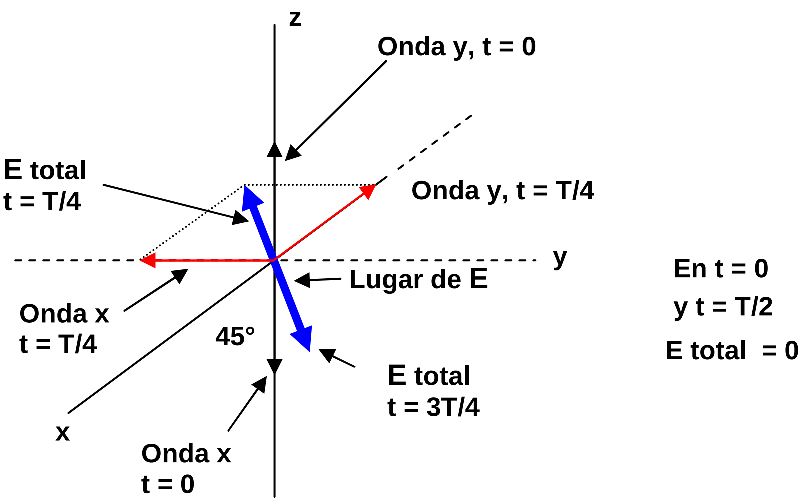
$\varepsilon = 24.8^{\circ}$ y $\mathrm{AR} = 2.17$ (rpta.)

(c) $\tau = 11.2^{\circ}$ (rpta.)

***2–17–6 Dos ondas CP.** Dos ondas polarizadas circularmente se intersectan en el origen. Una (la onda *y*) esta viajando en la dirección *y* positiva con **E** rotando en sentido horario como se observa desde un punto en el eje *y* positivo. La otra (onda *x*) esta viajando en la dirección positiva *x* con **E** rotando en sentido horario como se observa de un punto sobre el eje *x* positivo. En el origen, **E** para la onda *y* esta en la dirección positiva de *z* en el mismo instante que **E** para la onda *x* esta en la dirección negativa de *z*. ¿Cuál es el lugar geométrico resultante para el vector **E** en el origen?

Solución:

Descomponiendo las dos ondas en sus componentes como se muestra. Asuma que las ondas tienen igual magnitud.

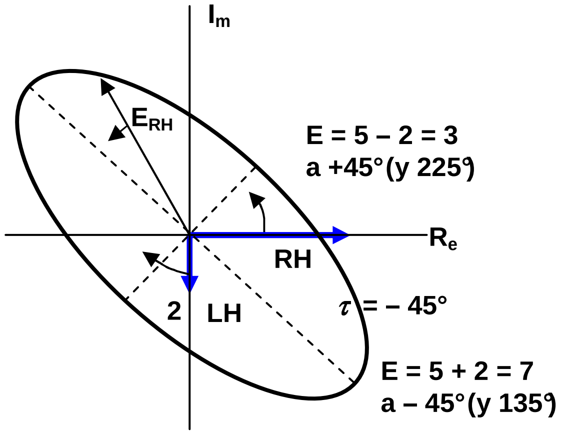


El lugar geométrico de **E** es una línea recta en el plano *xy* a un ángulo de 45° con respecto al eje *x* (o *y*).

***2–17–7 Ondas CP.** Una onda viajando saliendo de la página es el resultado de dos componentes de ondas circularmente polarizadas

$E_{\text{der}} = 5e^{j\omega t}$ y $E_{\text{izq}} = 2e^{j(\omega t+90°)}$ (V m^{-1}).
Encuentre
(*a*) La relación axial AR,
(*b*) El ángulo de inclinación *τ,* y
(*c*) La dirección de la rotación (izquierda o derecha).

Solución:



(a) $\text{AR} = \dfrac{2+5}{2-5} = -7/3 = -2.33$ (rpta.) [Note el signo menos para RH (polarización de la mano derecha)]

(b) Del diagrama, $\tau = -45^{\circ}$ (rpta.)

(c) Desde que **E** rota en sentido antihorario como una función del tiempo, RH. (rpta.)

2–17–8 Ondas EP. Una onda viajando hacia afuera perpendicularmente a la página (hacia el lector) es la resultante de dos componentes linealmente polarizados $E_x = 3\cos\omega t$ y $E_y = 2\cos(\omega t + 90°)$. Para la onda resultante encuentre
(*a*) La relación axial AR,
(*b*) El ángulo de inclinación *τ,* y
(c) La dirección de la rotación (derecha o izquierda).

Solución:

(a) AR = 3/2 = 1.5 (rpta.)

(b) $\tau = 0^{\circ}$ (rpta.)

(c) CW, LEP (rpta.)

***2–17–9 Ondas CP.** Dos ondas circularmente polarizadas viajando perpendicularmente fuera de la página tienen campos dados por $E_{izq} = 2e^{-j\omega t}$ y $E_{der} = 3e^{j\omega t}$ (Vm^{-1}) (rms).
Para la onda resultante encuentre
(*a*) La relación axial AR,
(*b*) La dirección de la rotación, y
(*c*) El vector de Poynting.

Solución:

(a) $\text{AR} = \dfrac{2+3}{2-3} = -5$ (rpta.)

(b) REP (rpta.)

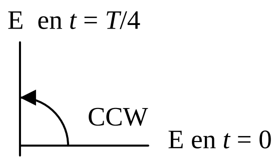
(c) $\mathrm{PV} = \dfrac{E_L^2 + E_R^2}{Z} = \dfrac{4+9}{377} = 0.034\ \mathrm{Wm}^{-2} = 34\ \mathrm{mWm}^{-2}$ (rpta.)

2–17–10 Ondas EP. Una onda viajando hacia afuera del papel perpendicularmente es el resultado de dos ondas elípticamente polarizadas (EP), una con componentes E_x = 5 cos ωt y E_y = 3 sin ωt y la otra con componentes $E_r = 3e^{j\omega t}$ y $E_l = 4e^{-j\omega t}$. Para la onda resultante, encuentre
(*a*) AR,
(*b*) τ , y
(*c*) La dirección de rotación.

Solución:

(a)
$$E_x = 5\cos\omega t + 3\cos\omega t + 4\cos\omega t = 12\cos\omega t$$
$$E_y = 3\sin\omega t + 3\sin\omega t - 4\sin\omega t = 2\sin\omega t$$
$\mathrm{AR} = 12/2 = 6$ (rpta.)

(b) Desde que E_x y E_y están en cuadratura de fase en el tiempo con E_x(max) > E_y(max), $\tau = 0^{\circ}$.
De la ecuación (2-17-3), $\sin 2\tau = \tan 2\varepsilon / \tan\delta$, $\varepsilon = \tan^{-1}(1/\mathrm{AR}) = 9.46^{\circ}$
como $\delta = 90^{\circ}$ luego $\tan\delta = \infty$
Por consiguiente $\tau = 0^{\circ}$ (rpta.)



(c) En $t = 0,\ E_x = 12,\ E_y = 0$
En $t = T/4 \quad (\omega t = 90^{\circ}),\ E_x = 0,\ E_y = 2$
Por consiguiente la rotación es anti horaria (CCW), y la polarización es elíptica derecha, REP (rpta.)

***2–17–11 Ondas CP.** Una onda viajando hacia afuera del papel perpendicularmente es el resultado de dos componentes circularmente polarizados $E_r = 2e^{j\omega t}$ y $E_l = 4e^{-j(\omega t + 45°)}$. Para la onda resultante, encuentre
(*a*) AR,
(*b*) τ , y
(*c*) La dirección de rotación.

Solución:

(a) $\mathrm{AR} = \dfrac{E_l + E_r}{E_l - E_r} = \dfrac{4+2}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (rpta.)

(b) Cuando $\omega t = 0,\ E_r = 2\angle 0^{\circ}$ y $E_1 = 4\angle -45^{\circ}$

Cuando $\omega t = -22\tfrac{1}{2}^{\circ}$, $E_r = 2\angle -22\tfrac{1}{2}^{\circ}$ and $E_1 = 4\angle -22\tfrac{1}{2}^{\circ}$

Tal que $E_l + E_r = E_{\max} = 6\ \angle -22\tfrac{1}{2}^{\circ}$ o $\tau = -22\tfrac{1}{2}^{\circ}$ (rpta.)

Note que las direcciones de rotación son opuestas para E_r y E_l

Para $-\omega t$, $E_r = 2\angle -\omega t$ pero $E_l = \angle +\omega t$

También, τ puede ser determinado analíticamente por la combinación de las ondas de los componentes de E_x y E_y con los valores de:

$$E_x = 5.60\angle{-30.4^{\circ}} \qquad \text{y} \qquad E_y = 2.95\angle{16.3^{\circ}}$$

Del cual $\delta = -46.7^{\circ}$

Desde que de (a) AR = 3, ε puede ser determinado de (2-17-3), el ángulo de inclinación es:
$\tau = -22.5^{\circ} \quad (rpta.)$

(c) Como $E_l > E_r$ la rotación es Horaria (CW ó LEP) (rpta.)

2–17–12 Relación de Depolarización-Circular. Sí la relación axial de una onda es AR, muestre que la relación de depolarización-circular de una onda está dada por

$R = (AR - 1)/(AR + 1)$

Esto es, para polarización circular pura $AR = 1$ y $R = 0$ (no depolarización) pero para polarización lineal $AR=\infty$ y $R = 1$.

Solución:

Cualquier onda puede ser descompuesta en dos componentes circularmente polarizados de manos opuestas, E_r y E_l para una relación axial

$$\text{AR} = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \left|\frac{E_r + E_1}{E_r - E_1}\right|$$

Del cual la relación de la *depolarización circular es* $R = \dfrac{E_1}{E_r} = \dfrac{\text{AR} - 1}{\text{AR} + 1}$

Esto para una polarización circular pura, AR = 1 y la depolarización es cero (R = 0), mientras que para una polarización lineal pura AR = ∞ y la relación de depolarización es uno (R =1). Cuando AR = 3, R = ½.